



Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша,
Академии Наук СССР

2

С.С. Лукьянов

710 9/224
N 83-30510

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ
КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ
СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ



Препринт № 130 за 1982 г.

Москва.

Routing Slip

Mail Code	Name	Action
STIF	Phil French	Approval
		Call me
		Concurrence
		File
		Information
		Investigate and Advise
		Note and Forward
		Note and Return
		Per Request
		Per Phone Conversation
		Recommendation
		See me
		Signature
		Circulate and Destroy

Enclosed are nine reports (~~xx~~ preprints)
from the Institute of Applied Mathematics
imeni M.V. Keldysh, Academy of Sciences
USSR: No. 87, 90, 99, 116, 120, 128, 130
135 and 136, for processing and announcement
in STAR.

Name	<i>McN</i> M.C. Nagurney	Tel. No. (or Code) & Ext.	75503582
Code (or other designation)	NIT-44	Date	5/5/83

Стохастический анализ управления движением
космического аппарата в окрестности коллинеарной
точки либрации с помощью сил светового давления

Лукьянов С.С.

ИПМ им. М.Ф.Келдыша АН СССР Препринт № 190 .
М., 1982, 31 стр., библи. 3 назв.

Работа посвящена исследованию возможности использования сил светового давления для управления движением космического аппарата (КА) в окрестности коллинеарной точки либрации плоской ограниченной круговой задачи трех тел. Управление осуществляется изменением площади "солнечного паруса" при постоянной его ориентации. В задаче учитывается влияние ошибок траекторных измерений и исполнения управления.

Разработан метод оценки размеров "солнечного паруса" КА, необходимого для удержания КА в окрестности коллинеарной точки либрации в течение заданного времени с заданной вероятностью. Вычислены основные характеристики управления для некоторых примеров в случае точек либрации систем Солнце-Земля и Земля-Луна.

Ключевые слова: либрационная точка, управление, солнечное давление.

This paper is dedicated to the possibility investigation of the utilization of the solar radiation pressure for the spacecraft motion control in the vicinity of collinear libration point of planar restricted ring problem of three bodies. The control is realized by changing "the solar sail" area at the its permanent orientation. In this problem the influence of the trajectory measuring errors and the errors of the execution control is accounted.

It is worked out the estimation method of the "solar sail" sizes, which are necessary for spacecraft keeping in the vicinity of collinear libration point during the certain time with given probability. The main control parameters were calculated for same examples in case of libration points of the Sun-Earth and Earth-Moon systems.

Key words: libration point, control, solar radiation pressure.

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША
АКАДЕМИИ НАУК СССР

Дукьянов С. С.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ОКРЕСТНОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ
ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ С ПОМОЩЬЮ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Москва, 1982 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
I. Введение	4
2. Дискретный аналог стохастической задачи	7
3. Ограниченный одномерный вариант задачи	II
4. Неограниченный одномерный вариант задачи	I4
5. Численные результаты для одномерного варианта задачи	I7
6. Использование одномерных вариантов для оценок в исходной четырехмерной задаче	20
7. О размерах "солнечного паруса" КА	22
Литература	28

1. Введение. В работе [1] была поставлена задача об удержании КА в окрестности коллинеарной точки либрации плоской ограниченной круговой задачи трех тел с помощью сил светового давления. Предполагалось, что направление силы светового давления, действующей на КА, постоянно совпадает с направлением светового потока. Это достигается с помощью специальной конструкции космического аппарата (КА со сферической оболочкой; КА с солнечным экраном и противовесом, пассивно стабилизированный по направлению на Солнце и т.п.). Такая конструкция избавляет от необходимости создания специальной системы управления ориентацией КА и может представлять самостоятельный интерес при конструировании самоуправляемого КА. Управление движением КА в этом случае осуществляется за счет изменения величины силы светового давления, что достигается изменением площади "солнечного паруса" КА. Более сложные технические решения (например, управление ориентацией солнечного экрана), вообще говоря, могут привести к уменьшению массы системы. Тем самым полученные в настоящей работе оценки размеров "солнечного паруса" достаточные для удержания КА в окрестности коллинеарной точки либрации в течение заданного времени, являются в некотором смысле мажорантными.

В главном приближении задача описывается [1] системой линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{d\varphi} = AV - \frac{1}{\beta} B(\varphi) \delta u, \quad V(t_0) = V^0, \quad (1)$$

где

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & 0 \end{vmatrix}, \quad B(\varphi) = \begin{pmatrix} -qk_2 \cos \varphi - \sin \varphi \\ -qk_2 \cos \varphi + \sin \varphi \\ \sin \varphi \\ -qk_1 \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$\beta = \lambda/\gamma$, $\mu = \omega/\gamma$, $\varphi = \gamma(t - t_0) + \varphi_0$; λ , ω , φ_0 , k_1 , k_2 , q — постоянные параметры задачи (см., например, [1], [2]). В частности, если одно из трех тел — Солнце (источник световой радиации), то в соотношениях (1) нужно положить $\gamma = 1$ и $B(\varphi) = B(0)$. Управление δu удовлетворяет условию $|\delta u| \leq 1$. Вектор V связан линейным соотношением

$$V = \frac{1}{u^*} Qf \quad (2)$$

с вектором $f = (x, y, \dot{x}, \dot{y})^T$, определяющим отклонения фазовых пере-

менных (координат и компонент скорости КА) от выбранной (опорной) условно-периодической траектории. Матрица Q - постоянна, а величина u^* пропорциональна $\Delta S = S_{\max} - S_{\min}$, где S_{\max} , S_{\min} - максимальная и минимальная допустимые площади "солнечного паруса" КА ([1], стр. 5, 6 и 8).

При отсутствии управления ($\delta u = 0$) решение системы (1), в частности, содержит экспоненциально растущую компоненту $V_1 = V_1^0 e^{\beta(\varphi - \varphi_0)}$. Отсюда возникает следующая задача: с помощью управления δu ($|\delta u| \leq 1$) обеспечить движение КА в окрестности опорной траектории в течение заданного времени. Некоторые схемы управления, использующие силу светового давления и решающие эту задачу в детерминированной постановке, были рассмотрены в [1].

Для произвольного значения $T = t - t_0$ в пространстве векторов V были определены [1] области управляемости. Такой области принадлежат лишь точки V^0 , из которых можно перейти за время, не превосходящее T , в начало координат $V = 0$ с помощью ограниченного по величине управления δu ($|\delta u| \leq 1$). Граница области управляемости состоит из точек V^0 , время перехода из которых точно равно T , а управление δu совпадает с управлением, оптимальным по быстродействию. Предельная область управляемости (при $T \rightarrow \infty$) представляет собой полосу в четырехмерном пространстве

$$|V_1^0| < C(\varphi_0), \quad (3)$$

где $C(\varphi) = \sqrt{\frac{q^2 k_2^2 + 1}{\beta^2 + 1}} \left| \frac{2 e^{-\beta \tilde{\varphi}} \sin(\tilde{\varphi} + \Delta)}{1 - e^{-\beta \pi}} - e^{-\beta \varphi} \sin(\varphi + \Delta) \right|$, значение $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет условию: $\tan \tilde{\varphi} = -q k_2$, $\varphi < \tilde{\varphi} \leq \varphi + \pi$, $\sin \Delta = (q k_2 \beta + 1)/k_0$, $\cos \Delta = (\beta - q k_2)/k_0$, $k_0 = \sqrt{(\beta^2 + 1)(q^2 k_2^2 + 1)}$.

Если точка $V(t)$ в некоторый момент времени t окажется вне предельной области управляемости, то она не может быть переведена в область (3) с помощью управления $|\delta u| \leq 1$.

В работе [1], в частности, исследовалась схема управления, переводящего фазовую точку из положения V^0 на гиперплоскость $V_1 = 0$ (одномерный вариант задачи). В этом случае КА переводится на траекторию, постоянно находящуюся в некоторой окрестности опорной траектории. Управление δu , оптимальное по быстродействию является релейной функцией $\delta u = \pm 1$ с периодом $\Delta T = \pi/\gamma$ (для системы Солнце-Земля $\Delta T = \infty$). Для одномерного варианта задачи предельная область управляемости также определяется соотношением (3).

В настоящей работе рассматривается стохастический вариант описанной выше задачи, когда измерения параметров траектории КА и исполнение управляющих воздействий осуществляются со случайными ошибками. Исследуемая задача в общем виде формулируется следующим образом: при известных законах распределения вероятностей входящих в задачу случайных величин оценить вероятность удержания КА в течение времени T в некоторой заданной окрестности опорной траектории и исследовать зависимости этой вероятности от параметров задачи. В качестве указанной окрестности будет рассматриваться предельная область управляемости детерминированной задачи (3).

Данная стохастическая задача в настоящей работе будет исследоваться в дискретной постановке. При этом будет предполагаться, что траекторные измерения осуществляются в фиксированные моменты времени, измеряемые параметры линейно связаны с вектором состояния $V(\varphi)$, а управление выбирается из класса кусочно-постоянных функций с разрывами в те же моменты времени. Для получения оценки вектора состояния и вычисления величины управления используется фильтр Калмана. Дискретный вариант исходной задачи описан в разделе 2. Числовые оценки для этого варианта задачи получены методом Монте-Карло и представлены в разделе 7.

Предварительно в разделах 3-4 анализируются упрощенные варианты исходной задачи, позволяющие оценить области значений параметров, которым соответствуют "разумные" вероятности удержания КА в течение нескольких лет. В разделе 3 дается постановка ограниченного одномерного варианта задачи, который возникает при специальном типе траекторных измерений. Несмотря на ряд упрощающих предположений, сделанных в разделах 2-3, исследование ограниченного одномерного варианта задачи, так же как и общей задачи, с помощью метода Монте-Карло весьма трудоемко из-за большого числа параметров. Использование аналитических методов исследования поставленной задачи затруднено, в частности, наличием ограничения на управление. В разделе 4 решается неограниченный одномерный вариант задачи, в котором нет такого ограничения. Получены соотноше-

ния для вычисления вероятности удержания КА в окрестности опорной траектории в течение заданного интервала времени.

В разделе 5 приведены численные результаты ограниченного и неограниченного одномерных вариантов задачи. Искомая вероятность определялась в ограниченном одномерном варианте задачи с помощью метода статистических испытаний, а в неограниченном одномерном варианте — с помощью выведенных аналитических соотношений. Вычисления проводились для коллинеарных точек либрации L_1 системы Солнце-Земля и L_2 системы Земля-Луна. Как показали эти вычисления, для достаточно больших интервалов времени между точками переключения управления исследуемые характеристики для обоих вариантов задачи близки по величине.

В разделе 6 на основе эвристических соображений устанавливается соответствие между исходной задачей и её ограниченным одномерным вариантом. С помощью вычислений оценивается точность указанного соответствия. Тем самым, решая существенно более простой одномерный вариант задачи, оказывается возможным найти приближенные значения параметров, обеспечивающие требуемые величины вероятности удержания КА для исходной задачи, в зависимости от вероятностных характеристик ошибок траекторных измерений и исполнения управления. При этом рассматривались различные виды траекторных измерений: радиотехнические измерения дальности и радиальной скорости КА относительно наземных пунктов, угловые измерения с борта КА. Оценки необходимых размеров "солнечного паруса" КА приведены в таблицах раздела 7. Для иллюстрации использования этих таблиц в этом разделе рассмотрены четыре примера.

2. Дискретный аналог стохастической задачи. Стохастическая задача в этой работе рассматривается в дискретной постановке. Интервал времени $[t_0, t_0+T]$ разбивается на N подынтервалов $(t_n, t_{n+1}]$ точками t_0, \dots, t_N ($t_N = T + t_0$). Предполагается, что траекторные измерения и изменения управления δu можно проводить лишь в моменты времени t_n ($n=0, 1, \dots, N$). На интервале $(t_n, t_{n+1}]$ управление δu постоянно ($|\delta u| \leq I$).

Используя эти предположения и интегрируя систему уравнений (I) на каждом интервале $[t_n, t_{n+1}]$, нетрудно получить дискретный аналог уравнения (I)

$$V(t_{n+1}) = F(t_{n+1} - t_n) V(t_n) + p(n) u_n, \quad (4)$$

где

$$F(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega x & -\sin \omega x \\ 0 & 0 & \sin \omega x & \cos \omega x \end{vmatrix},$$

$$p(n) = \begin{pmatrix} -k_3(e^{\lambda \Delta t_n} \sin(\varphi_n + \Delta) - \sin(\varphi_{n+1} + \Delta)) \\ k_3(e^{-\lambda \Delta t_n} \sin(\varphi_n - \Delta) - \sin(\varphi_{n+1} - \Delta)) \\ k_4 \cos(\varphi_n - \omega \Delta t_n) - k_5 \cos(\varphi_n + \omega \Delta t_n) + k_6 \cos \varphi_{n+1} \\ -k_4 \sin(\varphi_n - \omega \Delta t_n) - k_5 \sin(\varphi_n + \omega \Delta t_n) - k_7 \sin \varphi_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$k_3 = \sqrt{(q^2 k_2^2 + 1)/(\lambda^2 + \gamma^2)}, \quad k_4 = \frac{1 - qk_1}{2(\omega + \gamma)}, \quad k_5 = \frac{1 + qk_1}{2(\omega - \gamma)},$$

$$k_6 = \frac{\gamma + qk_1 \omega}{\omega^2 - \gamma^2}, \quad k_7 = \frac{\omega + qk_1 \gamma}{\omega^2 - \gamma^2}, \quad \Delta t_n = t_{n+1} - t_n, \quad \varphi_n = \gamma(t_n - t_0) + \varphi_0,$$

u_n - значение управления δu на интервале $(t_n, t_{n+1}]$. Вводя обозначения $F_n = F(t_{n+1} - t_n)$ и $V(n) = V(t_n)$, соотношение (4) можно написать в следующем виде

$$V(n+1) = F_n V(n) + p(n) u_n. \quad (5)$$

В каждый момент времени t_n на основании обработки траекторных измерений, полученных на интервале $[t_0, t_n]$, вычисляется оценка $\hat{V}(n)$ вектора состояния $V(n)$. Эта оценка будет использоваться ниже при нахождении расчетного значения управления \hat{u}_n . Фактически реализованное управление u_n отличается от расчетного значения \hat{u}_n на величину ошибки исполнения $\tilde{u}_n = u_n - \hat{u}_n$. В исходной постановке задачи предполагается, что \tilde{u}_n можно представить в следующем виде

$$\tilde{u}_n = \hat{u}_n \varepsilon_n + \eta_n, \quad (6)$$

где ε_n и η_n - мультипликативная и аддитивная исполнительные ошибки.

Для выбора расчетного значения управления \hat{u}_n можно воспользоваться, вообще говоря, различными критериями. Как отмечалось выше, при отсутствии управления ($\hat{u}_n = 0$) первая компонента вектора состояния экспоненциально быстро возрастает. При этом остальные компоненты вектора V остаются ограниченными. В этой работе расчетное значение управления \hat{u}_n будет выбираться из условия минимизации в момент времени t_{n+1} модуля первой компоненты

$|\bar{V}_i(n+1)|$ вектора $\bar{V}(n+1)$, где через $\bar{V}(n+1)$ обозначено математическое ожидание вектора $V(n+1)$ при условии, что в момент t_n была получена оценка $\hat{V}(n)$. Возможность использования такой ограниченной стратегии управления для решения задачи удержания КА в окрестности коллинеарной точки либрации, когда коррекции движения КА осуществляются с помощью реактивных двигателей, была показана в работе [2].

Из соотношения (5) очевидно следует, что

$$\bar{V}(n+1) = F_n \hat{V}(n) + p(n) \hat{u}_n. \quad (7)$$

Так как интервалы времени $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ ($n=0, 1, \dots, N-1$) фиксированы, то \hat{u}_n вычисляется по следующей формуле

$$\hat{u}_n = -\Psi\left(\frac{f_n \hat{V}_n}{p_n}\right), \quad (8)$$

где $\Psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 1 \\ x, & \text{если } |x| \leq 1 \\ -1, & \text{если } x < -1, \end{cases}$

\hat{V}_n, p_n - первые компоненты векторов $\hat{V}(n)$ и $p(n)$, f_n - первый диагональный элемент матрицы F_n .

Оценка $\hat{V}(n)$ вектора $V(n)$ определяется в результате обработки траекторных измерений. Предполагается, что в моменты времени t_n проводятся измерения вектора $Z(n) \in \mathbb{R}^l$, линейно связанного с $V(n)$

$$Z(n) = H_n V(n) + \Delta(n), \quad (9)$$

где H_n - известные матрицы размерности $l \times 4$, а $\Delta(n)$ - случайная ошибка измерений.

Будем предполагать, что введенные выше величины $\Delta \varepsilon_n, \eta_n$ и $\Delta(n)$ ($n=0, 1, \dots, N$) - последовательности независимых случайных величин с нулевыми средними, дисперсиями $E \Delta \varepsilon_n^2 = g_n^2$, $E \eta_n^2 = s_n^2$ и матрицей ковариаций $E \Delta(n) \Delta^T(n) = D_n$. Для получения оценки вектора состояния $\hat{V}(n)$ воспользуемся фильтром Калмана [3], оптимальным в смысле минимума среднеквадратической ошибки,

$$\hat{V}(n) = \bar{V}(n) + M_n (Z(n) - H_n \bar{V}(n)), \quad (10)$$

где

$$M_n = R_n H_n^T (H_n R_n H_n^T + D_n)^{-1},$$

$$R_{n+1} = F_n \Gamma_n F_n + (\hat{u}_n^2 g_n^2 + s_n^2) p(n) p^T(n), \quad (II)$$

$$\Gamma_n = (E - M_n H_n) R_n (E - M_n H_n)^T + M_n D_n M_n^T,$$

E - единичная матрица.

Предполагается, что в начальный момент времени t_0 вектор $V(0)$ имеет нормальное распределение вероятностей с математическим ожиданием $\bar{V}(0)$ и ковариационной матрицей R_0 .

Из-за наличия мультипликативных исполнительных ошибок и нелинейного закона управления вектор $V(n)$ не является гауссовым. При этом матрицы R_n , M_n и Γ_n зависят от случайных величин \hat{u}_{n-1} и, тем самым, не могут быть вычислены заранее. Если мультипликативные исполнительные ошибки отсутствуют ($g_n=0$, $n=0, 1, \dots, N-1$), то матрицы R_n , M_n и Γ_n не зависят от реализаций случайных величин $\Delta(n)$ и \hat{u}_n и могут быть вычислены заранее для всех значений $n=0, 1, \dots, N$.

Из (5), (7) и (10) легко выводится рекуррентная формула для вектора $\xi(n) = V(n) - \bar{V}(n)$

$$\xi(n+1) = F_n (E - M_n H_n) \xi(n) - F_n M_n \Delta(n) + p(n) \tilde{u}_n, \quad (I2)$$

которая будет использована ниже. В случае $g_n=0$ ($n=0, 1, \dots, N-1$) соотношение (I2) определяет нормальную марковскую последовательность векторов $\xi(n)$ с нулевыми математическими ожиданиями и матрицей ковариаций R_n .

Поставленная в предыдущем разделе стохастическая задача может быть теперь сформулирована следующим образом. Известно, что траекторные измерения осуществляются в моменты времени t_n ($n=0, 1, \dots, N$) и имеют вид (9), расчетное управление \hat{u}_n вычисляется по формуле (8), оценка вектора состояния $\hat{V}(n)$ определяется с помощью фильтра Калмана (10). Параметры нормального распределения $\Delta(n)$, \mathcal{E}_n и η_n известны в каждый момент времени t_n . Требуется определить вероятность блуждания фазовой точки $V(n)$ в течение заданного времени T внутри предельной области управляемости

$$|V_i(n)| < C_n, \quad (n=0, 1, \dots, N), \quad (I3)$$

где $C_n = C(\varphi_n)$, а функция $C(\varphi)$ введена в (3).

Соотношения (5)-(I3) описывают рекуррентную процедуру, позволяющую получать оценку $\hat{V}(n)$ и рассчитывать управление \hat{u}_n . Действительно, в произвольный момент времени t_n имеется априор-

ная информация в виде математического ожидания $\bar{V}(n)$ и матрицы R_n . После обработки измерения $Z(n)$ с помощью соотношения (10) вычисляется оценка $\hat{V}(n)$ и расчетное управление \hat{u}_n (8). Затем осуществляется шаг Δt_n и вычисляются величины $V(n+1)$ (7) и R_{n+1} (II) для следующего момента времени t_{n+1} .

Поставленную задачу для конкретных исходных данных можно эффективно решать с помощью моделирования процесса на ЭВМ, т.е. методом Монте-Карло. Однако задача содержит большое число параметров ($t_n, S_n, g_n, D_n (n=0,1,\dots,N), T, N, \bar{V}(0), R_0$). Поэтому проведение исследования методом Монте-Карло путем массовых расчетов при различных значениях входящих параметров требует больших затрат времени ЭВМ и затрудняет построение общей картины. Целесообразно на начальном этапе рассмотреть более простые варианты, позволяющие либо выяснить в главном аналитический характер некоторых зависимостей, либо построить эти зависимости численно, но более экономным образом. В связи с этим отметим возможные пути упрощения задачи:

1. Интервалы времени $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ ($n=0,1,\dots,N-1$) равны между собой $\Delta t_n = \Delta t$. В этом случае матрица F_n также будет постоянна $F_n = F$, $f_n = f = e^{\lambda \Delta t}$.
2. Дисперсии g_n^2 и S_n^2 исполнительных ошибок не зависят от времени: $g_n^2 = g^2$, $S_n^2 = S^2$, $n=0,1,\dots,N-1$.
3. Матрицы ковариаций $D_n (n=0,1,\dots,N)$ ошибок траекторных измерений одинаковы для всех n : $D_n = D$.
4. В начальный момент времени математическое ожидание вектора $V(0)$ равно нулю.

Ниже задача исследуется при этих упрощающих предположениях.

3. Ограниченный одномерный вариант задачи. Рассмотрим один частный случай задачи, представляющий и самостоятельный интерес. Данный вариант задачи возникает при специальном виде траекторных измерений (9), когда матрица H_n является вектор-строкой

$$H_n = (1, 0, 0, 0), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

В этом случае измерения зависят лишь от первой компоненты фазового вектора $V(n)$. Используя вид матриц H_n и F_n (4), легко показать, что в соотношениях (5), (7), (10)–(12) отцепляются уравне-

ния для первых компонент и первых элементов соответствующих векторов и матриц. Расчетное значение управления \hat{u}_n (8) и размеры областей управляемости (3) также зависят лишь от $\hat{V}_1(n)$. Таким образом, при траекторных измерениях такого специального вида можно ограничиться изучением поведения только первой компоненты вектора $V(n)$.

Слово "ограниченный" в названии данного раздела указывает на наличие, как и в исходной задаче, ограничения на величину расчетного управления ($|\hat{u}_n| \leq 1$, $n=0, 1, \dots, N-1$).

В дальнейшем будут использоваться соответствующие прописные буквы с нижним временным индексом для обозначения первых диагональных элементов матриц и первых компонент векторов, введенных в предыдущем разделе. Соотношения (5)–(12) для ограниченного одномерного варианта задачи будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= f V_n + p_n u_n, \\ \bar{V}_{n+1} &= f \hat{V}_n + p_n \hat{u}_n, \\ \hat{V}_n &= \bar{V}_n + m_n (\xi_n + \Delta_n), \\ \xi_{n+1} &= f(1-m_n) \xi_n - f m_n \Delta_n + p_n \tilde{u}_n, \\ m_n &= \frac{r_n}{r_n + d}, \\ r_{n+1} &= f^2 m_n d + (\hat{u}_n^2 g^2 + s^2) p_n^2, \\ f &= e^{\lambda \Delta t}, \quad u_n = \hat{u}_n + \tilde{u}_n, \quad \hat{u}_n = -\Psi\left(\frac{f \hat{V}_n}{p_n}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где \tilde{u}_n и функция $\Psi(x)$ определяются (6) и (8). Из соотношения (9) также получим

$$Z_n = V_n + \Delta_n. \quad (15)$$

Так же как и в общей задаче требуется определить вероятность блуждания случайной величины V_n внутри области (13) в течение времени T . Данная вероятность зависит от значений семи параметров: T , Δt , φ_0 , r_0 , g , s и σ_Δ , где σ_Δ – среднее квадратическое отклонение случайных ошибок траекторных измерений ($\sigma_\Delta^2 = d$). Для сокращения объема вычислений при численном анализе данного варианта задачи исследовались зависимости искомой вероятности только от Δt , g , s и σ_Δ при постоянных значениях остальных парамет-

ров. Кроме этого, рассматривался только установившийся режим процесса (I4), что позволило исключить из анализа зависимость решения от параметра Γ_0 .

Поясним понятие установившегося режима. Если процесс (I4) прошел n шагов, где n достаточно велико, то влияние начального распределения величины V^0 на распределение V_n будет несущественно. В случае $g=0$ (нет мультипликативных исполнительных ошибок) при определенных значениях интервала времени $\Delta t = \pi / \omega N_0$, где N_0 — произвольное целое положительное число, это приводит к тому, что величины ρ_n , Γ_n и m_n через равное количество шагов Δt будут принимать те же значения, т.е. будут периодическими функциями параметра n с периодом N_0 . Данная ситуация и будет называться установившимся режимом. Как показали вычисления, при любом достаточно малом начальном значении Γ_0 уже через несколько периодов N_0 процесс (I4) практически выходит на установившийся режим.

В дальнейшем будем считать, что уже в начальный момент времени процесс (I4) находится в установившемся режиме, т.е. интервалы времени между переключениями управления принимают значения $\Delta t = \pi / \omega N_0$, Γ_0 равно соответствующему установившемуся значению Γ_0^* (вычисление величины Γ_0^* дано в приложении к данному разделу). Данное предположение будет использоваться и при анализе модели, содержащей мультипликативные исполнительные ошибки. Величина Γ_0^* в этом случае вычисляется по тем же формулам (I8), что и при $g=0$.

Таким образом, в установившемся режиме количество параметров ограниченного одномерного варианта задачи сокращается до шести (Γ_0^* однозначно определяется значениями параметров Δt , ζ_Δ , ξ , φ). В случае $g=0$ величины ρ_n , Γ_n и m_n могут быть вычислены заранее.

Прежде чем перейти к обсуждению результатов вычислений в рамках этого варианта задачи, рассмотрим еще одну вспомогательную задачу, результаты которой мажорируют сверху результаты ограниченного одномерного варианта.

Замечание. Для системы Солнце—Земля ограниченный одномерный вариант задачи имеет более простой вид. В этом случае величины ρ_n не зависят от времени и равны между собой: $\rho_n = \rho = -\frac{4k_2}{\lambda}(\gamma - 1)$. Интервал времени между переключениями управления может принимать произвольные значения. Установившиеся значения дисперсии Γ_n^* так-

же одинаковы для всех t_n

$$r_n^* = r^* = \frac{\alpha}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4s^2 p^2 d}{\alpha^2}} \right), \quad (I6)$$

где $\alpha = (f^2 - 1)d + s^2 p^2$. Параметр φ_0 в данном случае отсутствует.

Приложение. Значения дисперсии r_k^* ($k=0, 1, \dots, N_0-1$) в установленном режиме определяются из условия периодичности функции r_n ($n=0, 1, \dots, N$) с периодом N_0 . Таким образом, значения r_k^* находятся как решение системы из N_0 алгебраических уравнений

$$\begin{cases} r_{k+1} = f^2 \frac{r_k d}{r_k + d} + s^2 p_k^2, & (k=0, 1, \dots, N_0-2) \\ r_{N_0} = r_0. \end{cases} \quad (I7)$$

Эта система уравнений при $S \neq 0$ имеет единственное неотрицательное ($r_k^* \geq 0$, $k=0, 1, \dots, N_0-1$) решение

$$\begin{aligned} r_0^* &= \left(\sqrt{(\gamma_4(N_0) - \gamma_1(N_0))^2 + 4\gamma_2(N_0)\gamma_3(N_0)} - (\gamma_4(N_0) - \gamma_1(N_0)) \right) / 2\gamma_3(N_0) \\ r_k^* &= \frac{\gamma_1(k)r_0^* + \gamma_2(k)}{\gamma_3(k)r_0^* + \gamma_4(k)}, \quad (k=0, 1, \dots, N_0-1), \end{aligned} \quad (I8)$$

где вектор $\gamma(k) = (\gamma_1(k), \gamma_2(k), \gamma_3(k), \gamma_4(k))$ вычисляется по рекуррентной формуле

$$\gamma(k+1) = P_k \gamma(k), \quad (k=0, 1, \dots, N_0-1),$$

где

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_k = \begin{vmatrix} a_k & 0 & b_k & 0 \\ 0 & a_k & 0 & b_k \\ 1 & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} a_k &= f^2 d + s^2 p_k^2, \\ b_k &= d s^2 p_k^2. \end{aligned}$$

При $S=0$ система уравнений (I7) имеет еще одно решение: $r_k^* = 0$ ($k=0, 1, \dots, N_0-1$). Однако это решение неустойчиво в том смысле, что при произвольном не равном нулю начальном значении r_0 в установленном режиме дисперсии r_n сходятся к значениям (I6), а не к решению $r_k^* = 0$.

4. Неограниченный одномерный вариант задачи. Рассмотрим одномерный вариант стохастической задачи, в котором отсутствуют мультипликативные исполнительные ошибки и расчетное управление \hat{u}_n ($n=0, 1, \dots, N-1$) может принимать произвольные неограниченные значения. Как и раньше, будем требовать, чтобы управление \hat{u}_n минимизировало величину $|\bar{V}_{n+1}|$. Из соотношения (I4) следует, что при отсут-

виде ограничений на управление \hat{u}_n является линейной функцией оценки

$$\hat{u}_n = -\frac{f}{p_n} \hat{V}_n. \quad (19)$$

При этом математическое ожидание \bar{V}_n будет равно нулю при любом n , а величина V_n будет совпадать с ξ_n и определяться соотношением

$$V_{n+1} = \alpha_n V_n + \varepsilon_n, \quad (n=0, 1, \dots, N-1), \quad (20)$$

где $\alpha_n = \frac{fd}{n+d}$, ε_n — последовательность независимых гауссовых случайных величин с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_n^2 = f^2 m_n^2 d + p_n^2 S^2$.

Таким образом, задача сводится к исследованию марковской случайной последовательности (20). В начальный момент времени величина V_0 имеет нормальный закон распределения вероятностей с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Γ_0 . Линейность соотношения (20) сохраняет гауссовыми и переменные V_n ($n=1, 2, \dots, N$). При этом математическое ожидание величины V_n равно нулю, а дисперсия — Γ_n .

Для упрощения дальнейших выкладок введем новую переменную состояния $\chi_n = V_n / C_n$, где C_n ($n=0, 1, \dots, N$) определяются в (13). Соотношение (20) относительно этой переменной принимает вид

$$\chi_{n+1} = \alpha_n^o \chi_n + \varepsilon_n^o, \quad (n=0, 1, \dots, N-1), \quad (22)$$

где $\alpha_n^o = \alpha_n C_n / C_{n+1}$, ε_n^o — последовательность независимых нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma_n^o = \sigma_n / C_{n+1}$.

Рассматриваемый в этом разделе предельный вариант задачи можно сформулировать следующим образом: найти вероятность блуждания нормальной марковской случайной последовательности (22) в течение заданного времени $T = N\Delta t$ между поглощающими границами ± 1 . Обозначим данную вероятность через P_N . Успешными реализациями процесса (22) будут лишь те, которые за N шагов ни разу не выйдут из интервала $(-1, 1)$. Введем обозначение для условной вероятности $W_n(x)$ ($n=0, 1, \dots, N$) успешного блуждания подпоследовательности χ_k ($k=n, \dots, N$) внутри области $(-1, 1)$ при условии, что в момент времени t_n эта подпоследовательность находилась в точке $\chi_n = x$. Очевидно, что при $|x| \geq 1$ вероятности W_n ($n=0, 1, \dots, N$) тождественно равны нулю, поэтому в дальнейшем исследовании ограничим интервалом $(-1, 1)$. Если вероятности $W_n(x)$ най-

цены, то вероятность P_N вычисляется по формуле

$$P_N = \int_{-1}^1 W_0(x) \rho_0(x) dx, \quad (23)$$

где $\rho_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2r_0^2}}$ — плотность распределения вероятностей величины χ_0 , $r_0^2 = r_0/c^2$.

Используя независимость χ_n и случайных величин ε_n^0 ($\kappa=0, 1, \dots, N-1$), можно получить рекуррентную формулу для W_n

$$W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon_n^0} \int_{-1}^1 W_{n+1}(y) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \alpha_n^0 x}{\varepsilon_n^0} \right)^2} dy, \quad (24)$$

где $W_N(x) = 1$ на интервале $(-1, 1)$. Для функции $W_{N-1}(x)$ из (24) нетрудно определить явное выражение:

$$W_{N-1}(x) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{1 - \alpha_{N-1}^0 x}{\sqrt{2} \varepsilon_{N-1}^0} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{1 + \alpha_{N-1}^0 x}{\sqrt{2} \varepsilon_{N-1}^0} \right) \right), \quad (25)$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$ — функция ошибок.

Отметим некоторые свойства функций $W_n(x)$, которые устанавливаются по индукции из свойств $W_n(x)$ и $W_{N-1}(x)$ с помощью соотношения (24).

1. Функции $W_n(x)$ четные.
2. $W_n(x)$ монотонно убывают при $x > 0$ и имеют максимум в точке $x = 0$.
3. При $\alpha_\kappa^0 = 0$ ($\kappa=0, 1, \dots, N-1$), что соответствует абсолютно точным траекторным измерениям, функции $W_n(x)$ постоянны и равны

$$W_n(x) = \prod_{\kappa=n}^{N-1} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \varepsilon_\kappa^0} \right), \quad (n=0, 1, \dots, N-1). \quad (26)$$

4. Если параметры ε_κ^0 ($\kappa=0, 1, \dots, N-1$) близки к нулю, то нормальная плотность распределения вероятностей, входящая в подынтегральное выражение (24), близка к дельта-функции Дирака. В этом случае для вероятностей $W_n(x)$ справедлива асимптотическая формула

$$W_n(x) \approx \prod_{\kappa=n}^{N-1} \operatorname{erf} \left(\frac{1 - \prod_{i=n}^{\kappa} \alpha_i^0 x}{\sqrt{2} \varepsilon_\kappa^0} \right), \quad (n=0, 1, \dots, N-1). \quad (27)$$

Соотношение (26) дает хорошее приближение для функций W_n при больших величинах Δt . Параметры α_κ^0 удовлетворяют неравенствам $0 \leq \alpha_\kappa^0 < e^{-\lambda \Delta t}$ и при больших Δt малы. Левая часть этих не-

равенств следует из определения α_k . Установившиеся значения Γ_k^* (18) при $S=0$ имеют простой вид $\Gamma_k^* = (f^2 - 1) d$, ($k=0, 1, \dots, N_0-1$). Добавление в правые части уравнений (17) членов $S^2 p_k^2$ увеличивает Γ_k^* . Таким образом, имеет место неравенство

$$\Gamma_k^* \geq (f^2 - 1) d, \quad (k=0, 1, \dots, N_0-1), \quad (28)$$

из которого и следует справедливость неравенства для α_k^0 .

При достаточно малых значениях α_n^0 можно воспользоваться и квадратичной аппроксимацией вероятностей $W_n(x)$

$$W_n(x) \approx \alpha_n - \beta_n x^2, \quad (29)$$

где
$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = B_{n+1} \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (n=0, 1, \dots, N-1)$$

$$B_n = \begin{vmatrix} B_{0n} & B_{1n} \\ B_{2n} & B_{3n} \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} a_N = 1, \\ b_N = 0, \end{matrix}$$

$$B_{0n} = e\tau f \left(\frac{1}{\sqrt{2} \zeta_n^0} \right), \quad d_n = \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \zeta_n^0 e^{-\frac{1}{2\zeta_n^0}},$$

$$B_{1n} = d_n - \zeta_n^0 B_{0n}, \quad B_{2n} = \frac{\alpha_n^0}{2 \zeta_n^0{}^4} d_n,$$

$$B_{3n} = \alpha_n^0 \left(B_{0n} - \frac{1 + 2 \zeta_n^0{}^2}{2 \zeta_n^0{}^4} d_n \right).$$

Замечание. Для системы Солнце-Земля полученные в данном разделе соотношения принимают более простой вид, так как величины C_n , α_n , ζ_n в данном случае одинаковы для всех $n=0, 1, \dots, N$: $C_n = -qk_z/\lambda$, $\alpha_n = \alpha$, $\zeta_n = \zeta$. При этом интервал времени Δt между переключениями управления может быть произвольным. Соотношение (20) для системы Солнце-Земля в установившемся режиме определяет стационарный гауссовый марковский процесс..

5. Численные результаты для одномерного варианта задачи. В настоящем разделе приведены численные результаты для одномерного варианта задачи, позволяющие оценить вероятность P_N удержания КА в окрестности коллинеарной точки либрации в течение заданного времени T . Вероятность P_N , как отмечалось выше, для установившегося процесса зависит от шести параметров (N_0 или Δt , T , g , S , ζ_Δ , φ_0), где $\zeta_\Delta = \sqrt{d'}$. Установившееся значение дисперсии начального

положения КА Γ_0^* однозначно определяется параметрами Δt , g , ζ_Δ , φ_0 . Если одним из притягивающих центров является Солнце, то параметр φ_0 отсутствует, а величина Γ_0^* определяется из соотношения (16).

На рис. I-I4 на плоскости параметров задачи ζ_Δ, S приведены линии равных значений вероятности P_N для коллинеарных точек либрации L_1 системы Солнце-Земля и L_2 системы Земля-Луна, где ζ_Δ и S - среднеквадратические отклонения для случайных ошибок траекторных измерений и аддитивных исполнительных ошибок. Напомним, что величины ζ_Δ и S безразмерные. При этом измеряемая величина V_n связана с фазовым вектором $\dot{\zeta}^T(t) = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$ соотношением

$$V_n = \frac{1}{\sqrt{Q}} q_1^T \cdot \dot{\zeta}(t_n),$$

где q_1^T - первая строка матрицы Q (см. [1]), а аддитивную ошибку исполнения η_n можно представить как $\eta_n = 2 \frac{\delta S}{\Delta S}$, где δS - ошибка реализации требуемой величины площади S солнечного паруса, а $\Delta S = S_{\max} - S_{\min}$ - допустимый диапазон изменения расчетной площади солнечного паруса КА.

Каждая изолиния на рис. I ограничивает область значений параметров ζ_Δ и S , обеспечивающих удержание КА в окрестности данной точки либрации в течение времени T с вероятностью, не меньшей P_N . Все графики, кроме представленных на рис.6, построены для интервала времени T , равного двум годам.

Расчеты проводились как для неограниченного одномерного варианта задачи, так и для одномерного варианта задачи с ограничением на управление $|\hat{u}_n| \leq 1$ ($n=0, 1, \dots, N-1$). В неограниченном случае вероятность P_N вычислялась с помощью соотношения (23), а условная вероятность $W_0(x)$ находилась после N -кратного вычисления квадратуры формулы (24). В ограниченном одномерном варианте задачи для получения вероятности P_N использовался метод Монте-Карло.

Система Солнце-Земля. Точка L_1 . На рис. I-5 приведены изолинии вероятности P_N , соответствующие значениям 0.999, 0.95, 0.9, 0.85 и 0.8, для неограниченного варианта задачи. Значения вероятности P_N указаны на рис. I. На остальных рисунках изолинии расположены в том же порядке. Графики построены для интервалов времени Δt , равных 10, 20, 30, 40 и 60 суткам. Области параметров ζ_Δ, S

ограниченные приведенными на рисунках изолиниями вероятности P_N , существенно уменьшаются с увеличением интервала Δt . На рис. 6 приведены изолинии вероятности $P_N = 0.9$ при различных длительностях интервала времени T удержания КА в окрестности точки либрации (2, 4, 6 и 8 лет). Как следует из этого рисунка, область значений параметров ζ_A, s , удовлетворяющих условию $P_N \geq 0.9$, уменьшается с увеличением T относительно медленно.

Аналогичные изолинии для ограниченного одномерного варианта задачи приведены на рис. 7 и 8 (интервал Δt равен 30 и 60 суткам, соответственно). Сплошными линиями построены графики $P_N = 0.9$ для значений среднеквадратического отклонения мультипликативных исполнительных ошибок $g = 0, 0.1, 0.15$ (рис. 7) и $g = 0, 0.03, 0.05$ (рис. 8). Пунктирной линией на рис. 7 изображена аналогичная изолиния вероятности $P_N = 0.9$ для неограниченного варианта задачи. При $\Delta t = 60$ сут. данная изолиния практически совпадает с изолинией ограниченного одномерного варианта задачи при $g = 0$. Крестиками на рис. 7 и 8 отмечены точки изолиний $P_N = 0.9$ неограниченного варианта задачи, полученные с использованием приближенной формулы (29) для вычисления вероятности $W_0(x)$.

Система Земля-Луна. Точка L_2 . Аналогичные изолинии для задачи удержания КА вблизи коллинеарной точки либрации L_2 системы Земля-Луна приведены на рис. 9-14. Для неограниченного варианта задачи графики построены для тех же значений P_N (0.999, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8), для интервалов переключения управления Δt , равных примерно 2.1, 3.7 и 4.9 сут. (рис. 9-11). Напомним, что для установившегося процесса интервал времени $\Delta t = \pi/\sqrt{N_0}$, где N_0 может принимать произвольные целые положительные значения. Интервалам времени Δt , равным 2.1, 3.7 и 4.9 сут., соответствуют значения параметра $N_0 = 7, 4$ и 3.

Изолинии $P_N = 0.9$ в ограниченном варианте задачи получены для значений среднеквадратического отклонения g мультипликативных исполнительных ошибок 0, 0.1, 0.2 ($\Delta t = 2.1$ сут., рис. 12), 0, 0.05, 0.1 ($\Delta t = 3.7$ сут., рис. 13) и 0, 0.03, 0.05 ($\Delta t = 4.9$ сут., рис. 14). Пунктирной линией изображена изолиния $P_N = 0.9$ неограниченного одномерного варианта задачи, а крестиками - построенная с использованием приближенной формулы (29). На рис. 13 и 14 пунктирные линии отсутствуют, так как они практически совпадают с изолиниями ограниченного одномерного варианта задачи при $g = 0$.

6. Использование одномерных вариантов для оценок в исходной четырехмерной задаче. В предыдущих разделах достаточно подробно был исследован существенно более простой вариант задачи, моделирующий процесс, когда траекторные измерения имеют вид (15). Если же матрица H_n (9) имеет произвольный вид, то следует рассматривать четырехмерный вариант задачи. Однако при некоторых ограничениях на параметры задачи можно подобрать такое эффективное значение дисперсии ошибок траекторных измерений одномерного варианта задачи, что изолинии вероятности P_N , соответствующие этому варианту задачи, будет несущественно отличаться от аналогичных изолиний исходной задачи.

Такая ситуация, в частности, имеет место при достаточно больших интервалах времени Δt между переключениями управления. Действительно, в этом случае первый диагональный элемент f_n матрицы перехода R_n существенно превосходит остальные элементы. То же самое справедливо, вообще говоря, и для первой компоненты вектора $p(n)$. Отсюда можно предположить, что и матрица R_n (II) при достаточно большом n будет также иметь первый элемент, существенно превосходящий остальные элементы.

Пусть данное предположение справедливо и матрица ковариаций R_n имеет вид

$$R_n = r_n E_1 + Q_n(\epsilon), \quad (30)$$

где у матрицы E_1 первый диагональный элемент равен единице, а остальные нулю; матрица $Q_n(\epsilon)$ содержит элементы порядка ϵ , где ϵ существенно меньше $f_n^2 = e^{2\lambda \Delta t n}$. Подставляя (30) в соотношения (II), можно показать, что первая строка матрицы M_n с точностью до величин порядка ϵ определяется следующим выражением

$$M_n^1 = r_n h_n^T (r_n \tilde{H}_n + D_n)^{-1}, \quad (31)$$

где $\tilde{H}_n = h_n h_n^T$, h_n - первый столбец матрицы H_n . Остальные элементы матрицы M_n имеют порядок величины ϵ . Нетрудно проверить, что (31) можно представить в виде

$$M_n^1 = d_n m_n h_n^T D_n^{-1}, \quad (32)$$

где

$$m_n = \frac{r_n}{r_n + d_n},$$

$$d_n = \frac{1}{h_n^T D_n^{-1} h_n}. \quad (33)$$

Используя приведенные рассуждения, можно показать, что матрицы Γ_n и R_{n+1} также имеют вид (30). При этом величины Γ_n вычисляются по формуле (14) одномерного варианта задачи, в которой в качестве дисперсии ошибок траекторных измерений d_n берется величина (33).

В четырехмерном варианте задачи уравнения для первых компонент векторов $V(n)$ и $\bar{V}(n)$ совпадают с соответствующими соотношениями одномерного варианта задачи. Покажем, что и первое соотношение системы (10) можно приближенно заменить соответствующим соотношением одномерного варианта задачи. Действительно, используя (10), (31)–(33), первую компоненту вектора $\hat{V}(n)$ можно представить в виде

$$\hat{V}_n = \bar{V}_n + m_n (\xi_n + \Delta_n) + \zeta_n, \quad (34)$$

где $\Delta_n = d_n h_n^T D_n^{-1} \Delta(n)$, а ζ_n – случайная величина, линейно зависящая от второй, третьей и четвертой компонент вектора $\xi(n)$. Этот вектор имеет нормальное апостериорное распределение вероятностей с нулевым средним и ковариационной матрицей R_n . Так как по предположению матрица R_n имеет вид (30), то соотношение (34) и аналогичное соотношение (14) одномерного варианта задачи отличаются на случайную величину ζ_n , имеющую нормальную апостериорную плотность распределения вероятностей с нулевым средним и дисперсией порядка ε .

Проведенные вычисления подтвердили наши предположения относительно матрицы ковариаций R_n . Так при интервалах времени Δt , равных 60 суткам для точки либрации L_1 системы Солнце–Земля и 4.9 суткам для точки либрации L_2 системы Земля–Луна, первый диагональный элемент матрицы R_n превосходит остальные элементы более чем в 20–50 раз. На рис. 15 и 16 для иллюстрации приведены изолинии вероятности $P_N = 0.9$ и $P_N = 0.95$, вычисленные для четырехмерного (сплошные линии) и ограниченного одномерного (пунктирные линии) вариантов задачи удержания КА в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце–Земля (рис. 15, $\Delta t = 60$ сут.) и точки либрации L_2 системы Земля–Луна (рис. 16, $\Delta t = 4.9$ сут.). В четырехмерном варианте задачи предполагались измерения компоненты \dot{x} фазового вектора f (см. (2)), что практически соответствует измерениям

радиальной скорости КА относительно Земли. Дисперсия мультипликативных ошибок исполнения g в обоих вариантах задачи была принята равной нулю. Значение дисперсии d ошибок траекторных измерений в случае одномерного варианта задачи вычислялось по формуле (33).

Как видно из этих рисунков, изолинии вероятности P_N для обоих вариантов задачи отличаются несущественно. С уменьшением интервала времени Δt это различие возрастает, хотя при $\Delta t = 30$ сут. (рис. 17) для точки либрации L_1 системы Солнце-Земля и $\Delta t = 3.7$ сут. (рис. 18) для точки либрации L_2 системы Земля-Луна это различие еще невелико.

Таким образом, при достаточно больших интервалах времени ориентировочные оценки необходимых размеров солнечного паруса КА в случае четырехмерного варианта задачи могут быть приближенно получены из результатов одномерного варианта. Такие оценки для различных составов траекторных измерений будут приведены в следующем разделе.

7. О размерах "солнечного паруса" КА. В этом разделе для некоторых вариантов траекторных измерений приведены численные оценки размеров "солнечного паруса" КА (величины $\Delta S = S_{max} - S_{min}$, где S_{max} , S_{min} - максимальная и минимальная допустимая площадь "солнечного паруса"), при которых возможно удерживать КА в окрестности коллинеарной точки либрации в течение двух лет с заданной вероятностью. Для получения ΔS в первом приближении используется описанная в предыдущем разделе эвристическая процедура, позволяющая установить соответствие между исходной четырехмерной задачей и её одномерным вариантом. Во многих случаях, как следует из рассмотренных далее примеров, величина ΔS , полученная на основе решения одномерного варианта задачи, оказывается близка к её значению, вычисленному для четырехмерного варианта задачи.

В настоящем разделе будут рассматриваться измерения лишь одного параметра ($l = 1, (9)$). В этом случае соотношение (33), устанавливающее связь между дисперсиями $D = \sigma_4^2$ и $d = \sigma_\Delta^2$ ошибок траекторных измерений исходной задачи и её одномерного варианта, принимает более простой вид

$$\sigma_\Delta = \sigma_4 / h, \quad (35)$$

где h — первый элемент матрицы-строки H (9).

Рассмотрим четыре варианта исходной задачи, различающиеся, в частности, составом траекторных измерений.

1. В первом варианте предполагаются измерения наклонной дальности от Земли до КА. Независимо от точки либрации и системы притягивающих тел эти измерения практически эквивалентны измерениям компоненты x фазового вектора f , связанного с вектором состояния V соотношением (2). Величина h в этом случае определяется формулой

$$h = u^* h_0, \quad (36)$$

где $h_0 = I/(\omega^2 + \lambda^2)$.

2. Во втором варианте рассматриваются измерения радиальной скорости КА относительно наземного пункта, что практически эквивалентно измерениям компоненты \dot{x} фазового вектора f . В этом случае

$$h_0 = \frac{\lambda}{\omega^2 + \lambda^2}. \quad (37)$$

3. В третьем варианте рассматривается задача удержания КА в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля. При этом анализируется возможность использования автономных измерений угла θ_1 между направлениями с КА на Землю и Луну. Для упрощения задачи предполагается, что данные измерения осуществляются лишь в моменты времени, когда лучи Земля-Луна и Земля-Солнце ортогональны. Величина h_0 в линейном приближении определяется следующей формулой

$$h_0 = - \frac{R_d}{(R_d^2 + R_L^2)(\omega^2 + \lambda^2)} (1 - k_1 \frac{R_d}{R_L}), \quad (38)$$

где R_L и R_d — расстояния от Земли до точки либрации L_1 и до Луны, соответственно.

4. В четвертом варианте рассматривается задача для точки либрации L_2 системы Земля-Луна с автономными измерениями угла θ_2 между направлениями на Солнце и Луну, осуществляемыми в произвольные моменты времени. В линейном приближении величина h_0 определяется следующей формулой

$$h_0 = \frac{k_1}{(\omega^2 + \lambda^2) R'_L}, \quad (39)$$

где R'_L — расстояние от центра Луны до точки либрации L_2 .

Величина u^* (см. [1]) пропорциональна вариации площади

солнечного паруса (или площади поперечного сечения сферической оболочки) КА, ортогонального световому потоку

$$U^* = k_0 \Delta S, \quad (40)$$

где $k_0 = 0.5 c_x p / m$, c_x - коэффициент, характеризующий взаимодействие фотонов с поверхностью "солнечного паруса"; p - импульс светового потока, проходящего за единицу времени через единичную площадку, ортогональную солнечным лучам; m - масса КА. Ниже будут приняты следующие числовые значения величин c_x , p и m : $c_x = 1$, что соответствует случаю неупругого удара; $p = 4.4 \cdot 10^{-5} \frac{2}{\text{см} \cdot \text{сек}^2}$; $m = 500 \text{ кг}$.

Из соотношений (35), (40) находим приближенное значение

$$\Delta S = \frac{1}{k_0 |h_0|} \frac{\sigma_4}{\sigma_\Delta}, \quad (41)$$

где величина h_0 вычисляется по формулам (36)–(39). Поясним, как использовать это соотношение. Пусть заданы характеристики ошибок управления g и s , интервал времени между измерениями Δt , стандартное отклонение σ_4 ошибок траекторных измерений и требуемая вероятность удержания КА P_N в течение времени T в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 . Предположим, что для данного T проведены вычисления одномерного варианта задачи и построены графики типа представленных на рис. 7, 8, 12–14. С помощью этих графиков при известных g , s можно определить σ_Δ , для которого вероятность P_N равна заданной. После этого из (41) получаем оценку ΔS для требуемой вариации площади "солнечного паруса" КА.

Контрольное решение четырехмерной задачи методом Монте-Карло при заданных σ_4 , g , s , Δt , T и ΔS позволяет получить уточненное значение вероятности P_N^y , которое, вообще говоря, не будет совпадать с требуемым. Заданное значение P_N достигается подбором уточненного значения ΔS^y площади паруса.

Заметим, что в качестве исходных данных необходимо задать и матрицу R_0 . При этом в случае одномерного варианта задачи (14) при расчете зависимостей $P_N(\sigma_\Delta, g, s)$ в качестве начальной дисперсии R_0^y используется первый диагональный элемент матрицы R_0 . Эта матрица должна определяться независимо из анализа точностных характеристик системы выведения КА на опорную орбиту. В примерах, описанных ниже, рассматривается два случая: либо в начальный момент $V_1^0 = V_2^0 = V_3^0 = V_4^0 = 0$ и $R_0 = 0$ (этот случай обозначается $R_0 = \delta(0)$ и соответствует точному выведению КА на опорную траекторию), либо

начальное распределение совпадает с установившимся. В последнем случае при расчете четырехмерного варианта задачи для каждого ΔS предварительно оценивается установившееся значение R_N^* матрицы R_0 , которое определяется путем вычисления R_N для достаточно больших значений N с помощью рекуррентного уравнения (II) при $g=0$ и $s=0$.

Порядок величины ΔS можно определить по приближенной формуле (4I). Для наглядности зависимости ΔS от ϕ_4 и ϕ_Δ для некоторых вариантов задачи представлены в таблицах I-6. Эти варианты различаются точками либрации и по типам траекторных измерений:

Точка либрации	Вариант задачи	Измерения	№ таблицы
L_1 системы Солнце-Земля	I	дальности	I
	2	рад. скорости	2
	3	угломерные	3
L_2 системы Земля-Луна	I	дальности	4
	2	рад. скорости	5
	4	угломерные	6

В клетках этих таблиц приведены значения ΔS в квадратных метрах.

Уточненные значения ΔS^y в рамках четырехмерной задачи были вычислены для четырех вариантов. Результаты представлены в таблице 7. Во всех этих вариантах интервал времени управления составлял 2 года, а требуемая вероятность $P_N = 0.9$. Большинство обозначений таблицы 7 уже описано в тексте. Объясним смысл величин, указанных в столбцах II-III. В конечной точке управления $t_N = T$ в результате вычислений четырехмерной задачи определяется матрица R_N . Первый диагональный элемент этой матрицы равен дисперсии $\sigma_{V_1}^2$ первой компоненты вектора состояния $V(N)$. При этом размеры предельной области управляемости (I3) определяются величинами C_n , которые для точки либрации L_1 системы Солнце-Земля при любом n равны 0.74, а для L_2 системы Земля-Луна принимают значения в диапазоне 0.24-0.79 в зависимости от φ_n .

С помощью матрицы R_N из (2) можно вычислить матрицу ковариаций фазовых переменных x, y, \dot{x}, \dot{y} в момент времени t_N . Пусть $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_{\dot{x}}^2, \sigma_{\dot{y}}^2$ - диагональные элементы этой матрицы. Наибольшая из величин σ_x, σ_y в таблице обозначена через σ_r . Аналогично $\sigma_r = \max(\sigma_{\dot{x}}, \sigma_{\dot{y}})$. Эти величины характеризуют порядок отклонения КА от начальной опорной орбиты. Так как к моменту t_N процесс устанавливается, то величины $\sigma_{V_1}, \sigma_r, \sigma_r$ характеризуют и на-

чальное распределение в случае $R_0 = R_0^*$.

Замечание. Чтобы получить представление о требуемой точности выведения КА, обеспечивающей отклонения КА от опорной орбиты в пределах эллипсоида, определяемого матрицей R_0^* , рассмотрим зависимость V_1 от кинематических параметров движения x, y, \dot{x}, \dot{y} :

$$V_1 = \frac{m}{\Delta S} (a_1 x + a_2 y + a_3 \dot{x} + a_4 \dot{y}), \quad (42)$$

которая следует из соотношений (2) и (40). Коэффициенты $\bar{a}_i = a_i \cdot 10^{-4}$ для рассматриваемых здесь точек либрации и значений C_x, ρ соответственно равны:

L_i	\bar{a}_1	\bar{a}_2	\bar{a}_3	\bar{a}_4
точка L_1 системы С.-З.	1.77820	-0.31899	-0.49371	0.26394
точка L_2 системы З.-Л.	0.67138	-0.14537	-0.22732	0.12382

В качестве характеристик допустимого отклонения координат в начальный момент времени можно принять следующие величины

$$\Delta x = \frac{C_{v_1} \Delta S}{m |a_1|}, \quad \Delta y = \frac{C_{v_1} \Delta S}{m |a_2|}, \quad \Delta \dot{x} = \frac{C_{v_1} \Delta S}{m |a_3|}, \quad \Delta \dot{y} = \frac{C_{v_1} \Delta S}{m |a_4|}. \quad (43)$$

Вычисления по формулам (43) при C_{v_1} для вариантов 1 и 3 таблицы 7 ($R_0 = R_0^*$) после перехода к размерным величинам дают оценки:

вариант	Δx км	Δy км	$\Delta \dot{x}$ м/сек	$\Delta \dot{y}$ м/сек
I	1094	6097	0.785	1.47
3	3.4	15.9	0.027	0.05

Для вариантов с меньшим значением ΔS требования к точности выведения будут еще более жесткими.

Таблица 1.

$C_{\Delta} \backslash C_4$ [км]	I	3	5	8
0.005	19	57	95	152
0.01	9.5	28	47	76
0.02	4.7	14	24	38
0.04	2.4	7	12	19
0.06	1.6	4.7	8	13
0.08	1.2	3.6	6	9
0.15	0.6	1.9	3.2	5

Таблица 2.

$C_{\Delta} \backslash C_4$ [см/сек]	I	3	5	8
0.005	376	1128	1880	3008
0.01	188	564	940	1504
0.02	94	282	470	752
0.04	47	141	235	376
0.06	31	94	157	251
0.08	23	70	117	188
0.15	12	38	63	100

Таблица 3.

$\beta_{\Delta} \backslash \beta_4 \begin{smallmatrix} \text{УГЛ.} \\ \text{МИН.} \end{smallmatrix}$	I	3	5	8
0.005	30189	90568	150947	241515
0.01	15095	45284	75473	120758
0.02	7547	22642	37737	60379
0.04	3774	11321	18868	30189
0.06	2516	7547	12579	20126
0.08	1887	5660	9434	15095
0.15	1006	3019	5032	8050

Таблица 4.

$\beta_{\Delta} \backslash \beta_4 \text{ [М]}$	10	30	50	80
0.005	26	78	131	209
0.01	13	39	65	105
0.015	9	26	44	70
0.02	6	20	33	52
0.025	5	16	26	42
0.03	4.4	13	22	35

Таблица 5.

$\beta_{\Delta} \backslash \beta_4 \begin{smallmatrix} \text{СМ} \\ \text{СЕК} \end{smallmatrix}$	I	3	5	8
0.005	4555	13666	22777	36443
0.01	2278	6833	11389	18222
0.015	1518	4555	7592	12148
0.02	1139	3417	5694	9111
0.025	911	2722	4555	7289
0.03	759	2278	3796	6074

Таблица 6.

$\beta_{\Delta} \backslash \beta_4 \begin{smallmatrix} \text{УГЛ.} \\ \text{МИН.} \end{smallmatrix}$	I	3	5	8
0.005	77882	233646	389411	623056
0.01	38941	116823	194705	311528
0.015	25961	77882	129804	207688
0.02	19470	58412	97353	155760
0.025	15576	46729	77882	124608
0.03	12980	38941	64902	103840

Таблица 7.

Исходные данные								Результаты				
№	Точка	Имя- реинг	g	s	Δt [сут]	ΔS [м ²]	R_0	P_N^y	ΔS^y [м ²]	ζ_{v_1}	ζ_r [км]	ζ_f [$\frac{м}{сек}$]
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	h_1 С-3	р.с. 3 $\frac{см}{сек}$	0.05	0.015	60	565	$\delta(0)$	0.85	630	0.062	2800	1.5
							R_0^*	0.8	1000	0.065	2800	1.6
2	"-"	у. θ_1 3'	0	0.07	29.6	7550	$\delta(0)$	0.78	8800	0.064	25000	15
							R_0^*	0.75	9800	0.067	25000	15
3	h_2 3-Л	р.с. 1 $\frac{см}{сек}$	0	0.014	4.9	4560	$\delta(0)$	0.7	6000	0.031	100	0.6
							R_0^*	0.65	8000	0.030	100	0.6
4	"-"	д. 0.1 км	0.05	0.022	3.7	130	$\delta(0)$	0.5	230	0.015	2.3	0.02
							R_0^*	0.45	300	0.014	2.3	0.02

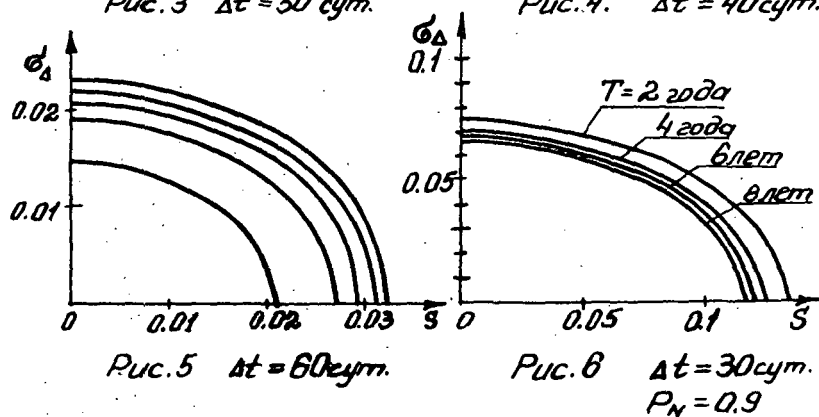
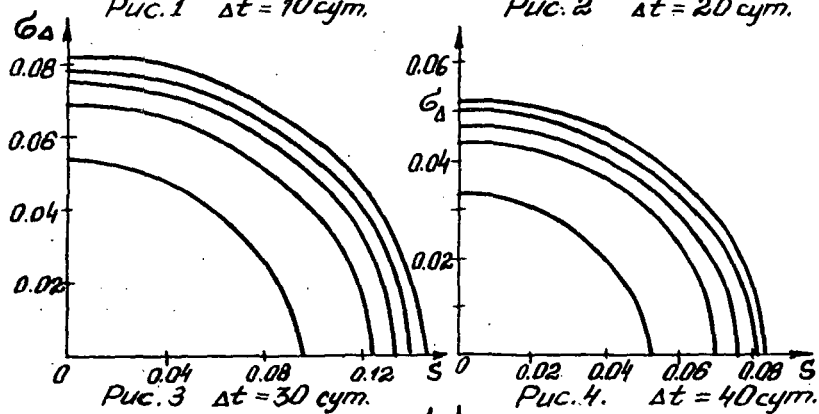
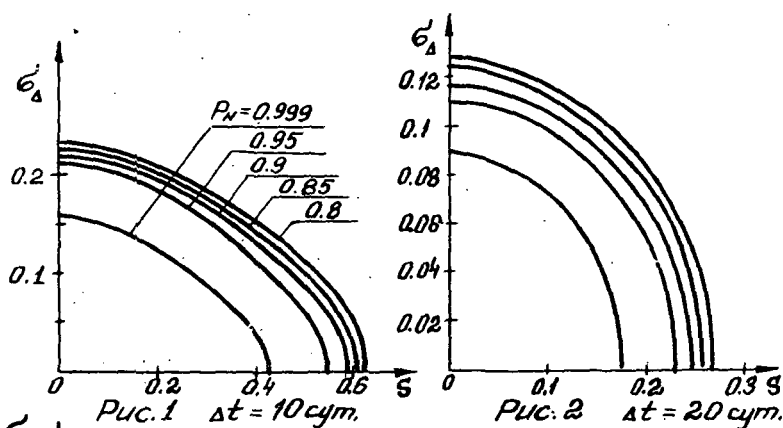
р.с. - радиальная скорость; у. - угол; д. - дальность.

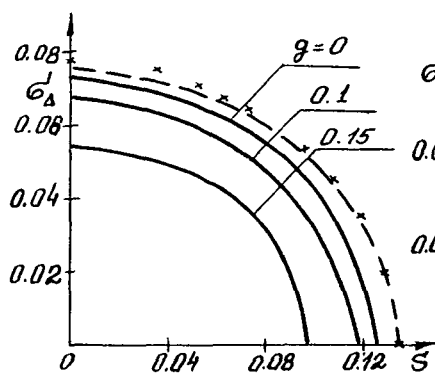
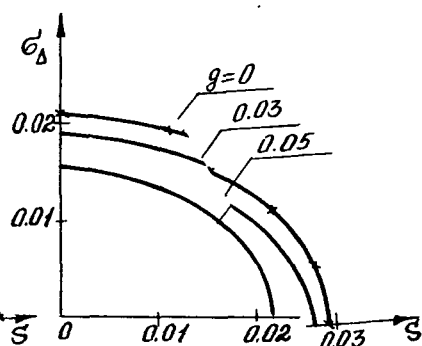
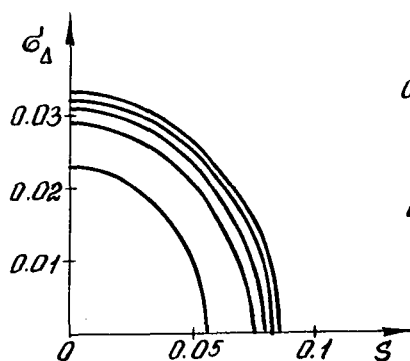
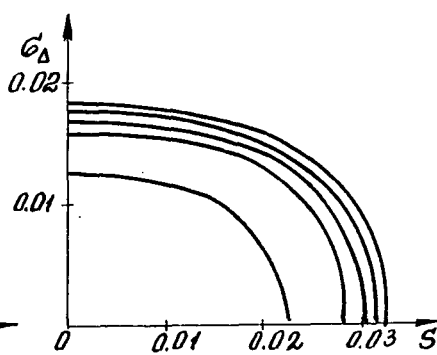
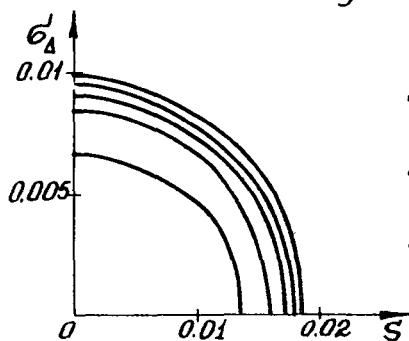
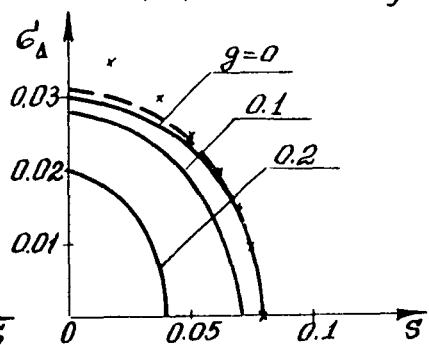
"

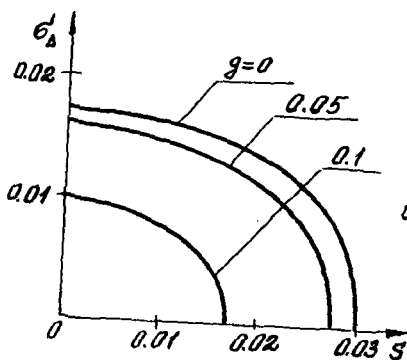
Автор благодарит М.Л.Лидова за постановку задачи и постоянную помощь при выполнении этой работы.

Литература.

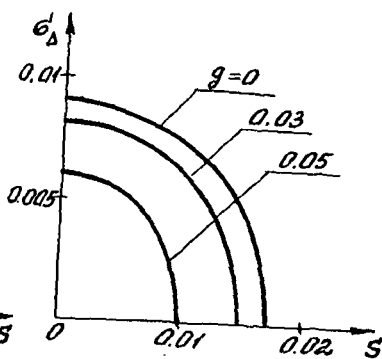
1. С.С.Лукиянов, "Задача об управлении движением космического аппарата силами светового давления в окрестности коллинеарной точки либрации", Препринт ИИМ АН СССР, 1979, № 112.
2. М.Л.Лидов, С.С.Лукиянов, "Статистические оценки в задаче управления движением космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации", Космич. исслед., т. XIV, вып.6, 1976.
3. А.Брайсон, Хо Ю-пи, "Прикладная теория оптимального управления", Мир, М., 1972.



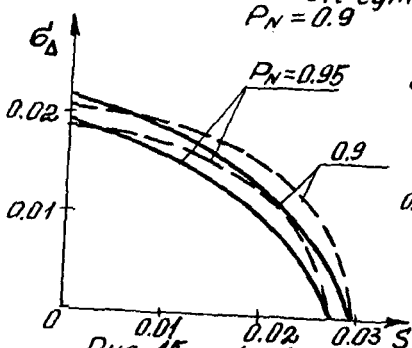
Puc.7 $\Delta t = 30 \text{ cym}$ Puc.8 $\Delta t = 60 \text{ cym}$ Puc.9 $\Delta t = 2.1 \text{ cym}$ Puc.10 $\Delta t = 3.7 \text{ cym}$ Puc.11 $\Delta t = 4.9 \text{ cym}$ Puc.12 $\Delta t = 2.1 \text{ cym}$
 $P_N = 0.9$



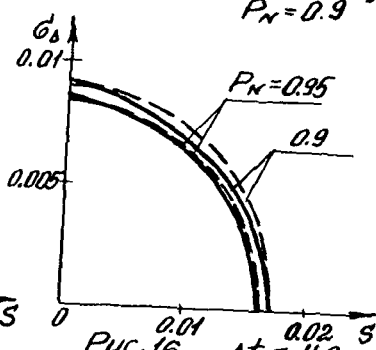
Puc. 13 $\Delta t = 3.7$ cym.
 $P_N = 0.9$



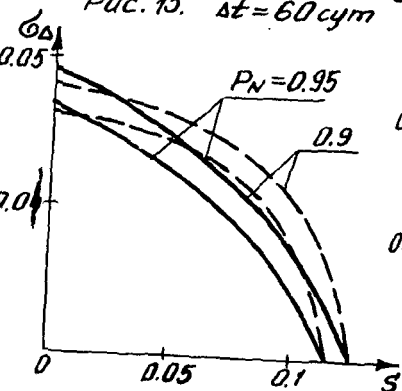
Puc. 14. $\Delta t = 4.9$ cym
 $P_N = 0.9$



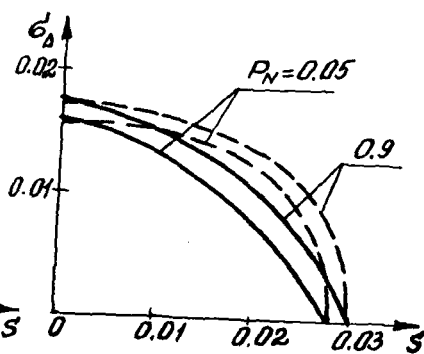
Puc. 15. $\Delta t = 60$ cym



Puc. 16. $\Delta t = 4.9$ cym



Puc. 17 $\Delta t = 30$ cym



Puc. 18 $\Delta t = 3.7$ cym

С.С. Лукьянов "Стохастический анализ управления движением
космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либ-
рации с помощью сил светового давления."

Редактор М.Л. Лядов.

Корректор Н.М. Тесленко.

Подписано к печати 16.09.82 г. № Т-08164. Заказ № 697.

Формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 160 экз.

Объем 1,5 уч.издл. Цена 12 коп.

055 (02)2

©

Отпечатано на роталпринтах в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме:
и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша
АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form:
initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.